Banque « Agro-véto »
B - MP20

MATHEMATIQUES - PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4. Les parties mathématiques et physique sont indépendantes.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Cette partie est notée sur 12 points

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{x})\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$ on a
$$1 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2.$$
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Montrer que f est dérivable au point 0 et donner la valeur de sa dérivée en 0.
Indication : on pourra utiliser la question 1.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
5. La dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est-elle continue en 0 ?
6. La dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est-elle continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?
7. On pose, pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. Montrer que $f'(x_n) > 0$.
8. Existe-il un intervalle de la forme $[0, \varepsilon]$ (avec $\varepsilon > 0$) sur lequel f est décroissante ? Justifier.

Exercice 2.

Soit a, b et c trois réels non nuls. On pose $\delta = ab + bc + ca$. On considère la matrice

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$$

1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la matrice $M(a, b, c)$ est-elle inversible ?
2. Calculer $M(1, 1, -\frac{1}{2})^3$.

3. La matrice $M(1,1,-\frac{1}{2})$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. Déterminer les valeurs propres de $M(1,1,-1)$ et les espaces propres associés.
5. La matrice $M(1,1,-1)$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
6. Determiner les valeurs propres de $M(a,b,c)$ dans $\mathbb{R}$.
   On distinguera les cas $\delta = 0$, $\delta > 0$ et $\delta < 0$.
7. Étudier, selon les valeurs de a, b, et c, la diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$ de la matrice $M(a,b,c)$.
   On distinguera encore les cas $\delta = 0$, $\delta > 0$ et $\delta < 0$.

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose que cette loi est la loi de Cauchy standard, c'est-à-dire une loi à densité sur $\mathbb{R}$, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $M_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, pour $n \geq 1$. **On rappelle que** $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \circ(\frac{1}{x})$, **au voisinage de $+\infty$, et que la dérivée de la fonction** arctan **est la fonction** $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Donner une primitive de f.
2. Montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq 0) = (\frac{1}{2})^n$.
3. Montrer que pour $t \leq 0$,
$$\mathbb{P}(n(M_n)^{-1} \leq t) \leq \mathbb{P}(M_n \leq 0).$$
4. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(n(M_n)^{-1} \leq t)$ pour $t \leq 0$, quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que pour $t > 0$,
$$\mathbb{P}(n(M_n)^{-1} \leq t) = (\frac{1}{2})^n + \mathbb{P}(M_n \geq \frac{n}{t}).$$
6. Montrer que pour $t > 0$,
$$\mathbb{P}(M_n \geq \frac{n}{t}) = 1 - (1 - \frac{t}{n\pi} + \circ(\frac{1}{n}))^n.$$
7. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(n(M_n)^{-1} \leq t)$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers une limite à déterminer. On distinguera bien les cas selon le signe de t.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n(M_n)^{-1} \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

8. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle que l'on indiquera.

FIN DE LA PARTIE MATHEMATIQUES

PARTIE PHYSIQUE

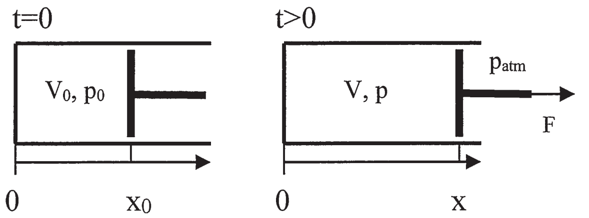
Cette partie est notée sur 8 points

Epreuve de physique : **voiturette à air comprimé**

Les calculs peuvent être effectués facilement sans calculatrice,
On prendra $\ln(150) \approx 5$; $g = 9{,}81 \approx 10$ m/s² et $R = 8{,}314 \approx 10$ J/(mole.K)

Les questions 1, 2, 3, 6, 8, 9, 11 et 12 sont indépendantes des précédentes.

On considère de l'air sous pression dans un cylindre, de section S, dans lequel coulisse sans frottement un piston. Le piston exerce par ailleurs une force F sur une tige. On suppose que le gaz reste à une température constante T_0 de 27°C.



1) Exprimer la variation de pression dp en fonction de la variation de volume dV, du volume V et de la pression p.

2) Exprimer le déplacement élémentaire du piston dx lorsque le volume augmente de dV.

3) Exprimer l'intensité de la force exercée sur la tige lorsque la pression intérieure est p.

4) Exprimer le travail élémentaire fourni à la tige δW lorsque la pression diminue de $|dp|$, connaissant p, p_{atm}, p_0 et V_0.

5) Exprimer l'énergie mécanique totale récupérable en fonction de p_{atm}, p_0 et V_0.

6) Pour que la température du gaz reste constante faut-il chauffer ou refroidir le cylindre ?
Quelle est la quantité de chaleur à échanger ?

7) Une voiturette à air comprimé possède un réservoir d'air comprimé de 100 litres à 150 bar (rappel $p_{atm} \approx 1\text{bar} = 10^5$ Pa). Montrer que l'énergie mécanique récupérable est d'environ 6000 kJ.

8) Sachant que la masse molaire de l'air est d'environ 30g/mole, calculer la masse d'air comprimé initiale.

La masse de la voiturette, conducteur compris, est de 500 kg (on la suppose constante). Pour évaluer son autonomie, on suppose qu'elle effectue des cycles comprenant une montée sans arrêt de 1 km avec une pente de 5%, puis un trajet à plat d'un km comportant 10 arrêts, puis une descente de 1 km sans arrêt avec une pente de 5%. On néglige le frottement de roulement ainsi que celui de l'air autour de la voiturette. La montée et la descente s'effectuent à une vitesse constante de 36 km/h. Après chaque arrêt, la voiturette reprend une vitesse de 36 km/h. Le freinage s'effectue avec quatre freins à disque. Chaque disque pèse 2,5 kg et la capacité thermique massique du matériau est de 500 J/(kg.K).

9) Calculer la composante de la force que la voiturette doit exercer dans la direction de la route (au niveau des roues) lors de la montée. On rappelle que la pente est la tangente de l'angle que fait la route avec l'horizontale et que pour les petits angles $tg(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$.

10) Calculer le travail de cette force sur l'ensemble de la montée.

11) Retrouver ce résultat par le biais de l'énergie potentielle.

12) Calculer l'énergie nécessaire pour retrouver une vitesse de 36 km/h après un arrêt.

13) Calculer le nombre de cycles que peut effectuer au maximum la voiturette (sans recharge d'air comprimé) et son autonomie maximale exprimée en kilomètres.

14) Si lors de la descente toute l'énergie mécanique dissipée est transférée sous forme de chaleur aux quatre disques et qu'on néglige leur refroidissement, quelle est leur élévation de température ?

15) Comment pourrait-on augmenter l'autonomie de la voiturette (sans modifier p_0 et V_0) ?

FIN DE LA PARTIE PHYSIQUE

FIN DU SUJET