Banque « Agro-véto »
B - MP19

MATHEMATIQUES - PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice, d'abaques et de tables est <u>interdit</u> pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Cette partie est notée sur 12 points.

Exercice 1. Le plan vectoriel E est rapporté à une base $(\vec{i};\vec{j})$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère f_m, l'endomorphisme de E défini par :

$$f_m(\vec{i}) = m\vec{i} + \vec{j},$$
$$f_m(\vec{j}) = \vec{i} + m\vec{j}.$$

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note A_m la matrice de f_m dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

1. (a) Donner A_m.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est bijective (inversible).
2. Déterminer le noyau et l'image de f_m lorsque f_m n'est pas bijectif.
3. Donner les valeurs propres de la matrice A_{-1} et les sous-espaces propres associés.
4. La matrice A_{-1} est-elle diagonalisable ? Justifier.

Exercice 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1. On suppose que X_1 possède une densité que l'on note f, continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. On considère les variables aléatoires $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, et $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de F.
2. Déterminer $\mathbb{P}(Z > x)$ en fonction de $F(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de F.
4. Exprimer $\mathbb{P}(Y \leq y, Z > z)$ pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, en fonction de $F(y)$ et $F(z)$.
5. Déterminer à l'aide de la question précédente $\mathbb{P}(Y \leq y, Z \leq z)$ pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, en fonction de $F(y)$ et $F(z)$.

À partir de maintenant on suppose que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$, où λ est un réel strictement positif.

6. Calculer F dans ce cas.
7. Déduire de la question 1 une densité f_Y de Y.
8. Déduire de la question 3 une densité f_Z de Z.

Exercice 3. On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de la fonction sinus, au voisinage de 0.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \int_{ax}^{bx} f(t)\, dt$$

3. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq t - \sin(t) \leq \frac{t^2}{2}$.
4. Montrer que
$$|g(x)| \leq \frac{x}{2}(b-a).$$
5. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim_{x \to 0^+} g(x)$.

On considère la fonction h, définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

6. Montrer que h est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$.
7. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0, en déterminant $\lim_{x \to 0} h(x)$.

On notera encore h le prolongement de h à $\mathbb{R}$.

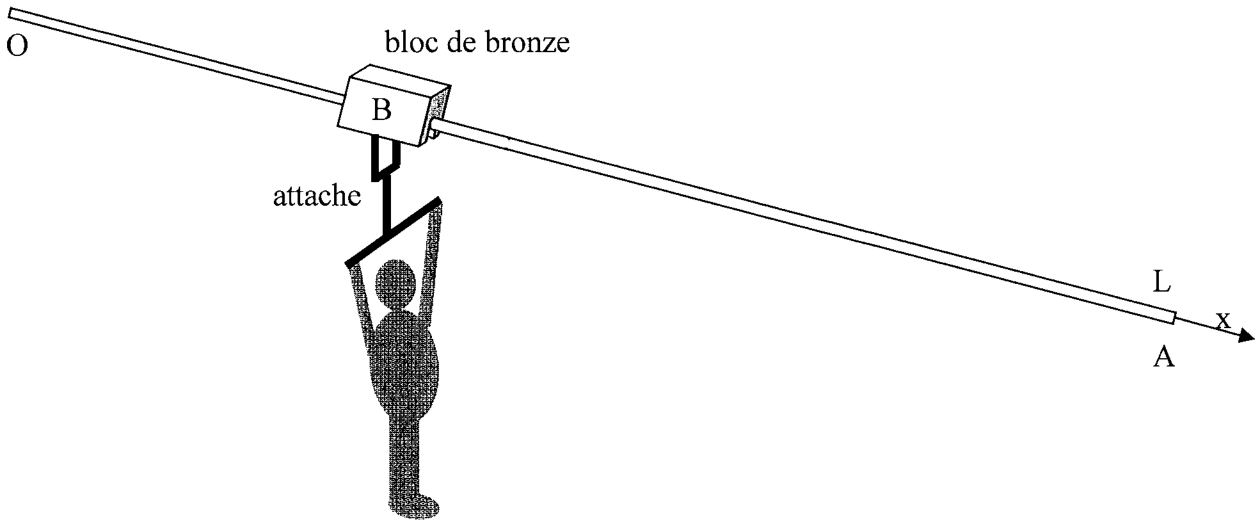
8. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée h' sur $\mathbb{R}^*$.
9. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim_{x \to 0} h'(x)$.
10. Montrer que h est dérivable en 0 et donner la valeur de sa dérivée en 0.

PARTIE PHYSIQUE

Cette partie est notée sur 8 points

Les calculs numériques peuvent être aisément réalisés sans calculatrice. On rappelle que $2^{1/2} \approx 1,4$.

Un individu est accroché à un câble d'acier par l'intermédiaire d'un bloc de bronze, pourvu d'une encoche, qui coulisse sur ce câble.



La masse totale du bloc de bronze, de l'attache et de l'individu : **m** est de 100 kg. On approchera l'accélération de la pesanteur par la valeur de 10 m/s². Le câble exerce une force de frottement constante, dans la direction opposée à Ox, sur le bloc de bronze dont la norme $\mathbf{F_f}$ est égale à 50 N.

Partie A :

Le câble est supposé parfaitement rectiligne (câble très tendu), il a une longueur **L** de 100 m et fait un angle α de 0.1 radian avec l'horizontale. On pourra utiliser les approximations des angles petits : $\sin(\alpha) \approx tg(\alpha) \approx \alpha$. On néglige la longueur du bloc de bronze devant celle du câble. L'individu part du début du câble, en O, avec une vitesse initiale nulle. On néglige le frottement de l'air.

A.1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, exprimer les évolutions de la vitesse du bloc de bronze : $\mathbf{v_b}$ et de sa position le long du câble : $\mathbf{x_b}$ en fonction du temps ainsi que de **m**, **g**, α et $\mathbf{F_f}$.

A.2) Calculer le temps de parcours jusqu'au bout du câble : $\mathbf{t_f}$

A.3) Calculer la vitesse finale : $\mathbf{v_f}$.

A.4) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, calculer la vitesse finale qu'aurait l'individu en l'absence de frottement .

A.5) Calculer le travail $\mathbf{W_f}$ de la force de la force de frottement (du début jusqu'au bout du câble).

A.6) Retrouver la vitesse finale en présence de frottement (question A3) en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

Partie B :

On suppose que le travail de la force de frottement est intégralement transmis sous forme de chaleur au bloc de bronze. On néglige l'échange de chaleur du bloc de bronze avec l'air, le câble et l'attache. Le bloc de bronze à une masse : $\mathbf{m_b}$ de 2,5 kg, une capacité thermique massique : **c** de 400 J/(kg.K) et une température initiale $\mathbf{T_0}$ de 20°C.

En utilisant le premier principe de la thermodynamique calculer la température finale du bloc de bronze.

Partie C :

On considère l'air comme un gaz parfait de masse molaire moyenne environ égale à 30 g/mol. L'ordre de grandeur de la norme de la force de frottement exercée par l'air sur l'individu peut être obtenu par la relation : $\mathbf{F_a} = \frac{1}{2} \rho v^2 S_f$ où S_f est la surface frontale de l'individu qui est de l'ordre de $1 m^2$.

C.1) Calculer approximativement la masse volumique de l'air : ρ à une température : $\mathbf{T_a}$ de 300 K et à une pression : **p** de 10^5 Pa en approchant la constante des gaz parfait par la valeur de 8 J/(mol.K).

C.2) La force de frottement de l'air peut-elle être négligée ?

Partie D :

On considère le câble comme une succession de $\mathbf{n_r}$ =100 ressorts, chacun ayant une longueur à vide : $\mathbf{L_{rv}}$ de 99 cm et une raideur : **k** de 10^6 N/m. **L'individu se trouve à mi-longueur du câble**. Par souci de simplification, on fait abstraction de sa vitesse, c'est-à-dire que l'on étudie le cas où l'individu est bloqué à mi-longueur du câble (comme si le bloc de bronze était soudé au câble à mi-longueur). On néglige le poids du câble devant celui de l'individu. On notera O le point d'attache supérieur du câble, A son point d'attache inférieur et B son point milieu (voir schéma).

D.1) Calculer la norme de la force : $\mathbf{F_{c0}}$ exercée dans le câble à vide (sans individu accroché ni bloc de bronze) que l'on nomme aussi tension à vide du câble.

D.2) Dessiner la configuration où l'individu est bloqué à mi-longueur du câble et lister les forces exercées sur l'ensemble bloc de bronze + attache + individu que l'on peut considérer comme un seul solide.

D.3) Exprimer la norme de la force: $\mathbf{F_{cg}}$ exercée dans la partie gauche du câble, entre B et O, lorsque l'individu est accroché au bloc de bronze ; ceci en fonction de $\mathbf{n_r}$, **k,** $\mathbf{L_{rv}}$ et $\|\overrightarrow{OB}\|$.

D.4) Exprimer vectoriellement l'équilibre des forces en fonction de **m,** $\mathbf{n_r}$, **k,** $\mathbf{L_{rv}}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{g}$, $\|\overrightarrow{OB}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$.

D.5) Estimer le déplacement : **h** du point B vers le bas par rapport au cas du câble parfaitement tendu. Pour cette estimation, on pourra considérer le cas où l'angle α est nul (les points O et A sont supposés à la même altitude et l'individu est bloqué au milieu). On supposera, ce que l'on vérifiera a posteriori, que la tension dans le câble reste proche de la tension à vide (voir question D1) et que **h<<L**.